第 10 講　数学Ⅲの微分

34 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

《12 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

35　a を正の実数とし，p を正の有理数とする．座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p\ (x>0)$ と $y=\log x\ (x>0)$ を考える．この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする．

以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい．

(1)　a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ．

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3)　(2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

《15 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36　a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\qquad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ．

《13 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　数学Ⅲの微分

34 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える．

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ．

《12 東大・理科》

【答】 最大値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

【解説】 直線 l は $y=(\tan\theta)x$ と表せる．

ここで $x^2+(y-1)^2=1$ と $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の交点は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{3\pm\sqrt{7}}{3}\right)$ なので

$\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}<\tan\theta<\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を満たす．ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ と $\tan\theta=\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を θ_1，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ と $\tan\theta=\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を θ_2 とおく．

また，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ と直線 l の交点を P，$x^2+(y-1)^2=1$ と l の原点以外の交点を Q，(0, 1) を C とし，原点を O とすると，$\cos\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\mathrm{OP}}$ より $\mathrm{OP}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ であり，

$\angle\mathrm{COQ}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\mathrm{CO}=\mathrm{CQ}$ より $\angle\mathrm{OCQ}=2\theta$ なので $\mathrm{OQ}=2\sin\theta$ となるので

$L=\mathrm{OQ}-\mathrm{OP}=2\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$ となる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}L&=2\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{3\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}\cos^3\theta-\sin\theta)}{3\cos^2\theta}\\&=\frac{\sqrt{2}(6\cos^4\theta+2\cos^2\theta+1)(\sqrt{3}\cos\theta+1)(\sqrt{3}\cos\theta-1)}{3\cos^2\theta(3\sqrt{2}\cos^3\theta+\sin\theta)}\end{aligned}$$

より，α を $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ をみたすものとすると，$\tan\alpha=\sqrt{2}$ より $\theta_1<\alpha<\theta_2$ となるので，L の増減は

θ	θ_1	$\cdots$	α	$\cdots$	θ_2
L'		$+$	0	$-$	
L		↗		↘	

となるので，$\theta=\alpha$ で L は最大値をとり，その値は $2\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ である．

以上より，**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

35 a を正の実数とし，p を正の有理数とする．座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p \quad (x>0)$ と $y=\log x \quad (x>0)$ を考える．この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする．

以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい．

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ．

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

《15 東大・理科》

【答】 (1) $a=\dfrac{1}{ep}$，Q の x 座標は $e^{\frac{1}{p}}$　(2) $2\pi\left(\dfrac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+1\right)$　(3) $p=\dfrac{1}{2}$

【解説】 (1) $ax^p=\log x \iff a=x^{-p}\log x$ より，$y=a$ と $y=x^{-p}\log x$ のグラフの共有点が 1 点のみであればよい．$f(x)=x^{-p}\log x$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1-p\log x}{x^{p+1}}$ より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{ep}$	↘	0

となる．

よって $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{ep}}$，Q の x 座標は $\boldsymbol{e^{\frac{1}{p}}}$．

(2) 求める体積は

$$\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}\pi(ax^p)^2dx-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\pi(\log x)^2\,dx=\pi\left[\frac{a^2}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}-\pi\Big[x\{(\log x)^2-2\log x+2\}\Big]_1^{e^{\frac{1}{p}}}$$

$$=\boldsymbol{2\pi\left(\frac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+1\right)}$$

(3) $2\pi\left(\dfrac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+1\right)=2\pi$ より $\dfrac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}=0$．ゆえに $\boldsymbol{p=\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36　a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}, \qquad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ．

《13 東大・理科》

【答】 $a=-\dfrac{2}{5\pi}$，$\dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$

【解説】 $f(x)=g(x) \iff \dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax \iff a=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ より

$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと $h'(x)=-\dfrac{x^2+2}{x^3}\cos x$ より，n を 0 以上の整数として

x	$2n\pi$	$\cdots$	$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$2n\pi+\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$2(n+1)\pi$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↘		↗		↘	

ここで $\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x)=\infty$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}$，$h\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{2}{3\pi}$，$h\left(\dfrac{5}{2}\pi\right)=-\dfrac{2}{5\pi}$，$h\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=\dfrac{2}{7\pi}$ である．

また，$x\geqq 4\pi$ のとき $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqq\dfrac{1}{16\pi^2}$，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqq\dfrac{1}{4\pi}$ なので

$|h(x)|\leqq\dfrac{1}{16\pi^2}+\dfrac{1}{4\pi}=\dfrac{1+4\pi}{16\pi^2}<\dfrac{2}{7\pi}$ となる．

よって求める a は $\boldsymbol{a=-\dfrac{2}{5\pi}}$，$\boldsymbol{\dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。